1 Test d'hypothèses

De manière générale, la rédaction standard d'un test d'hypothèses s'écrit toujours de la même façon. Elle est décrite ci-dessous pour un paramètre θ qui devra être remplacé par p pour une proportion, μ pour une moyenne, σ^2 pour une variance, d_μ (resp. r_μ) pour une différence (resp. rapport) de moyennes et enfin d_{σ^2} (resp. r_{σ^2}) pour une différence (resp. rapport) de variances. La valeur de référence θ_0 et la loi $\mathcal{L}_0$ devront être adaptée selon la problématique.

Rédaction standard d'un test d'hypothèses paramétrique

Hypothèses de test :

$$\mathbf{H_0} : \theta = \theta_0 \text{ contre } \mathbf{H_1} : \begin{cases} \theta > \theta_0 & (\text{cas } \textbf{(a)} : \textit{test unilatéral droit}) \\ \theta < \theta_0 & (\text{cas } \textbf{(b)} : \textit{test unilatéral gauche}) \\ \theta \neq \theta_0 & (\text{cas } \textbf{(c)} : \textit{test bilatéral}) \end{cases}$$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{Y}\right) \rightsquigarrow \mathcal{L}_0$$

où $\mathcal{L}_0$ est une loi standard à préciser (selon la problématique envisagée).

Règle de décision :

$$\text{on accepte } \mathbf{H_1} \text{ si } \begin{cases} \boxed{p - valeur < \alpha} \\ \text{ou de manière équivalente} \\ \boxed{\begin{cases} \widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right) > \delta^+_{\lim,\alpha} & \textbf{(a)} \\ \widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right) < \delta^-_{\lim,\alpha} & \textbf{(b)} \\ \widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right) < \delta^-_{\lim,\alpha/2} \text{ ou } \widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right) > \delta^+_{\lim,\alpha/2} & \textbf{(c)} \end{cases}} \end{cases}$$

où $\delta^-_{\lim,\alpha} = q_\alpha$ et $\delta^+_{\lim,\alpha} = q_{1-\alpha}$ désignent respectivement les quantiles d'ordre α et $1-\alpha$ associés à la loi $\mathcal{L}_0$ et où la p$-$valeur est définie mathématiquement par :

$$p\text{-}valeur = \begin{cases} \mathbb{P}_{\theta=\theta_0}\left(\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{Y}\right) > \widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right)\right) & \textbf{(a)} : \textit{p-valeur droite} \\ \mathbb{P}_{\theta=\theta_0}\left(\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{Y}\right) < \widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right)\right) & \textbf{(b)} : \textit{p-valeur gauche} \\ 2\times\min\left(\mathbb{P}_{\theta=\theta_0}\left(\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{Y}\right)<\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right)\right),\mathbb{P}_{\theta=\theta_0}\left(\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{Y}\right)>\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}\left(\boldsymbol{y}\right)\right)\right) & \textbf{(c)} : \textit{p-valeur bilatérale} \end{cases}$$

Conclusion : Application de la règle de décision au vu des données $\boldsymbol{y}$.

Propriétés :

1. **La somme des p-valeur gauche et p-valeur droite est égale à 1**
2. **La p-valeur bilatérale est égale à deux fois la plus petite des p-valeurs gauche et droite**

Tableaux récapitulatifs :

Il sera aussi supposé que les données ont été saisies dans le logiciel `R` soit sous le nom `y` (pour un unique échantillon) soit sous les noms `y1` et `y2` (pour deux échantillons indépendants).

θ	$\widehat{\theta}(\boldsymbol{Y})$	$\widehat{\theta}(\boldsymbol{y})$ en `R`	$\sigma_{\widehat{\theta}}$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta}}}(\boldsymbol{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta}}}(\boldsymbol{y})$ en `R`
p	$\widehat{p}(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$	`mean(y)`	$\sigma_{\widehat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$\sqrt{\frac{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})(1-\widehat{p}(\boldsymbol{Y}))}{n}}$	`seMean(y)`
μ	$\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y}) = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$	`mean(y)`	$\sigma_{\widehat{\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{Y})}{n}}$	`seMean(y)`
σ^2	$\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{Y}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y})^2$	`var(y)`	$\sigma_{\widehat{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\ddot{Y}}}{n}}$	$\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_{\ddot{Y}}}\left(\ddot{\boldsymbol{Y}}\right)}{n}}$	`seVar(y)`
$d_\mu=\mu^{(1)}-\mu^{(2)}$	$\widehat{d_\mu}(\boldsymbol{Y}) = \widehat{\mu^{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right) - \widehat{\mu^{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)$	`mean(y1)-mean(y2)`	$\sigma_{\widehat{d_\mu}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{(1)}}{n^{(1)}} + \frac{\sigma^2_{(2)}}{n^{(2)}}}$	$\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right)}{n^{(1)}} + \frac{\widehat{\sigma^2_{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}{n^{(2)}}}$	`seDMean(y1,y2)`
			Cas Gaussien et $\sigma^2_{(1)} = \sigma^2_{(2)} = \sigma^2$: $\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{Y}) = \frac{(n^{(1)}-1)\widehat{\sigma^2_{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right)+(n^{(2)}-1)\widehat{\sigma^2_{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}{n^{(1)}+n^{(2)}-2}$		`seDMeanG(y1,y2)`
$d_{\sigma^2}=\sigma^2_{(1)}-\sigma^2_{(2)}$	$\widehat{d_{\sigma^2}}(\boldsymbol{Y}) = \widehat{\sigma^2_{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right) - \widehat{\sigma^2_{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)$	`var(y1)-var(y2)`	$\sigma_{\widehat{d_{\sigma^2}}} = \sqrt{\frac{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(1)}}}{n^{(1)}} + \frac{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(2)}}}{n^{(2)}}}$	$\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(1)}}}\left(\boldsymbol{\ddot{Y}^{(1)}}\right)}{n^{(1)}} + \frac{\widehat{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(2)}}}\left(\boldsymbol{\ddot{Y}^{(2)}}\right)}{n^{(2)}}}$	`seDVar(y1,y2)`
$r_\mu = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}$	$\widehat{r_\mu}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{\mu^{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right)}{\widehat{\mu^{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}$	`mean(y1)/mean(y2)`	$\sigma_{\widehat{r_\mu}} = \frac{1}{\mu^{(2)}}\sqrt{\frac{\sigma^2_{(1)}}{n^{(1)}} + r^2_\mu \times \frac{\sigma^2_{(2)}}{n^{(2)}}}$	$\frac{1}{\widehat{\mu^{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right)}{n^{(1)}} + \widehat{r_\mu}(\boldsymbol{Y})^2 \times \frac{\widehat{\sigma^2_{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}{n^{(2)}}}$	`seRMean(y1,y2)`
$r_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2_{(1)}}{\sigma^2_{(2)}}$	$\widehat{r_{\sigma^2}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{\sigma^2_{(1)}}\left(\boldsymbol{Y^{(1)}}\right)}{\widehat{\sigma^2_{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}$	`var(y1)/var(y2)`	$\sigma_{\widehat{r_{\sigma^2}}} = \frac{1}{\sigma^2_{(2)}}\sqrt{\frac{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(1)}}}{n^{(1)}} + r^2_{\sigma^2}\frac{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(2)}}}{n^{(2)}}}$	$\frac{1}{\widehat{\sigma^2_{(2)}}\left(\boldsymbol{Y^{(2)}}\right)}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(1)}}}\left(\boldsymbol{\ddot{Y}^{(1)}}\right)}{n^{(1)}} + \widehat{r_{\sigma^2}}(\boldsymbol{Y})^2\,\frac{\widehat{\sigma^2_{\ddot{Y}^{(1)}}}\left(\boldsymbol{\ddot{Y}^{(1)}}\right)}{n^{(1)}}}$	`seRVar(y1,y2)`

			Cadre Asymptotique		Cadre Gaussien	
θ	θ_0	$\sigma_{\widehat{\theta}}$ sous $\mathbf{H_0}$	$\delta_{\theta,\theta_0} = (\theta-\theta_0)/\sigma_{\widehat{\theta}}$	$\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}(\boldsymbol{Y})$ et sa loi sous $\mathbf{H_0}$	δ_{θ,θ_0}	$\widehat{\delta_{\theta,\theta_0}}(\boldsymbol{Y})$ et sa loi sous $\mathbf{H_0}$
p	p_0	$\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$	$\delta_{p,p_0} = \frac{p-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$	$\widehat{\delta_{p,p_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{p}(\boldsymbol{Y})-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	[redacted]	
μ	μ_0	$\sigma_{\widehat{\mu}}$	$\delta_{\mu,\mu_0} = \frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\widehat{\mu}}}$	$\widehat{\delta_{\mu,\mu_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y})-\mu_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{\mu}}}(\boldsymbol{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	$\delta_{\mu,\mu_0} = \frac{\mu-\mu_0}{\sigma_{\widehat{\mu}}}$	$\widehat{\delta_{\mu,\mu_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{\mu}(\boldsymbol{Y})-\mu_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{\mu}}}(\boldsymbol{Y})} \rightsquigarrow \mathcal{S}t(n-1)$
σ^2	σ^2_0	$\sigma_{\widehat{\sigma^2}}$	$\delta_{\sigma^2,\sigma^2_0} = \frac{\sigma^2-\sigma^2_0}{\sigma_{\widehat{\sigma^2}}}$	$\widehat{\delta_{\sigma^2,\sigma^2_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{Y})-\sigma^2_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{\sigma^2}}}(\boldsymbol{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	$\delta_{\sigma^2,\sigma^2_0} = (n-1)\frac{\sigma^2}{\sigma^2_0}$	$\widehat{\delta_{\sigma^2,\sigma^2_0}}(\boldsymbol{Y}) = (n-1)\frac{\widehat{\sigma^2}(\boldsymbol{Y})}{\sigma^2_0} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$
$d_\mu=\mu^{(1)}-\mu^{(2)}$	d_0	$\sigma_{\widehat{d_\mu}}$	$\delta_{d_\mu,d_0} = \frac{d_\mu-d_0}{\sigma_{\widehat{d_\mu}}}$	$\widehat{\delta_{d_\mu,d_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{d_\mu}(\boldsymbol{Y})-d_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{d_\mu}}}(\boldsymbol{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	$\delta_{d_\mu,d_0} = \frac{d_\mu-d_0}{\sigma_{\widehat{d_\mu}}}$	$\widehat{\delta_{d_\mu,d_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{d_\mu}(\boldsymbol{Y})-d_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{d_\mu}}}(\boldsymbol{Y})} \rightsquigarrow \mathcal{S}t(n^{(1)}+n^{(2)}-2)$
$d_{\sigma^2}=\sigma^2_{(1)}-\sigma^2_{(2)}$	d_0	$\sigma_{\widehat{d_{\sigma^2}}}$	$\delta_{d_{\sigma^2},d_0} = \frac{d_{\sigma^2}-d_0}{\sigma_{\widehat{d_{\sigma^2}}}}$	$\widehat{\delta_{d_{\sigma^2},d_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{d_{\sigma^2}}(\boldsymbol{Y})-d_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{d_{\sigma^2}}}}(\boldsymbol{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	[redacted]	
$r_\mu = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}}$	r_0	$\sigma_{\widehat{r_\mu}}$	$\delta_{r_\mu,r_0} = \frac{r_\mu-r_0}{\sigma_{\widehat{r_\mu}}}$	$\widehat{\delta_{r_\mu,r_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{r_\mu}(\boldsymbol{Y})-r_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{r_\mu}}}(\boldsymbol{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	[redacted]	
$r_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2_{(1)}}{\sigma^2_{(2)}}$	r_0	$\sigma_{\widehat{r_{\sigma^2}}}$	$\delta_{r_{\sigma^2},r_0} = \frac{r_{\sigma^2}-r_0}{\sigma_{\widehat{r_{\sigma^2}}}}$	$\widehat{\delta_{r_{\sigma^2},r_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{r_{\sigma^2}}(\boldsymbol{Y})-r_0}{\widehat{\sigma_{\widehat{r_{\sigma^2}}}}(\boldsymbol{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$	$\delta_{r_{\sigma^2},r_0} = \frac{r_{\sigma^2}}{r_0}$	$\widehat{\delta_{r_{\sigma^2},r_0}}(\boldsymbol{Y}) = \frac{\widehat{r_{\sigma^2}}(\boldsymbol{Y})}{r_0} \rightsquigarrow \mathcal{F}(n^{(1)}-1,n^{(2)}-1)$